Condensé d'Analyse

Réele à plusieurs variables

Alexandre Sallinen

Mai 2021

Résumé Le présent ouvrage a pour but d'offrir une exposition claire et concise aux principes de l'analyse réele sur les espaces produits de $\mathbb{R}$. Seront abordés la résolution d'équation différentielle linéaires de premier et second ordre, des bases de topologies, une exploration des conditions de régularité sur les focntions à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de leurs intégrales. L'ordre dans lequel seront présenté ces sujets a été choisis pour offrir une exposition naturelle et de sorte à construire une intuition géométrique pour le lecteur.

1 $\mathbb{R}^n$ et sa topologie

1.1 Rappels : Opérations sur des ensembles

Espaces produits On rappelle qu'a tout ensembles A,B on peut associer un ensemble nommé produit cartésien de A et B noté $A \times B$ défini comme étant l'ensemble des paires d'éléments de A et B, plus formellement $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$. Cette opération est évidemment associative (les deux enssembles $A \times (B \times C)$ et $(A \times B) \times C$ sont en bijection) donc on ommetra les parenthèses lors du produit de plus de deux ensembles. On note en particulierr $A \times A = A^2$ et récursivement pour $n \in \mathbb{N}$, $A \times A^n = A^{n+1}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, et $x \in A^n$ on définit $\forall i \leq n \ x_i \in A$ comme la i-ème composante du n-uplet x et si $\forall j \leq n x_i = x_j = a \in A$ (toutes les composantes sont égales et valent a) on note $x = a_{A^n}$

Pour des raisons purement géométrique on appelera $\mathbb{R}^2$ le plan et $\mathbb{R}^3$ l'espace. En effet c'est ainsi qu'on se les représentera pour le reste du résumé. On confondra le nom de point et d'élément d'un ensemble.

Dénombrement On dit d'un ensemble qu'il est dénombrable si il existe une bijection entre lui et (un sous ensemble de) l'ensemble $\mathbb{N}$. Entre autres, tout ensemble fini est dénombrable, $\mathbb{Q},\mathbb{Z},\mathbb{N}$ et n'importequel produit cartésien fini($\mathbb{Q}^2, \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \dots$) de ces ensembles est dénombrable.

Alexandre Sallinen
E-mail : alexandre.sallinen@epfl.ch

Ensemble des parties d'un ensemble Soit A un ensemble on note 2^X l'ensemble des sous ensembles de A (la notation fait référence à la cardinalité de 2^X pour X fini).

1.2 Ouverts : Motivations

Métrique, proximité et intuitions On définit les notions de ce chapitre dans $\mathbb{R}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ mais on les illustrera systématiquement dans $\mathbb{R}^2$. Cette première section a pour but de motiver l'utilisation d'ouverts et d'en donner une explication intuitive.
Soit x_0 un point du plan, il est interessant de se demander comment parler de points proches de x_0. Comme le plan n'est pas borné (il s'étend à l'infini) la sphère de rayon 1 et de centre x_0 n'est pas particulièrement petite et celle de rayon 10^{100} pas particulièrement grande à l'échelle de $\mathbb{R}^2$. Pour définir la notion de proximité il faut donc s'attacher à une notion différente que la "taille" de l'ensemble considéré. Une des plus belles constructions mathématiques du XIX siècle caractérise la proximité par la notion d'ouverts. Pour cela on utilise la notion de métrique, une focntion $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui fournit une notion de distance sur $\mathbb{R}^n$. Plus précisément elle doit respecter des lois de positivité, nullité seulement pour un même point et la loi du triangle. Pour cette introduction on ne considèrera que la distance dite euclidienne qui consiste à prendre la racine de la somme des carrés des différences des composantes de deux points (définitions formelles à la section 1.3).

Boules ouvertes et fermées Si l'on considère l'ensemble des points à une distance inférieure ou égale à $r \in \mathbb{R}$ de x_0 dans le plan on récupère la boule fermée de rayon r autour de x_0 que l'on note $\overline{\mathscr{B}(x_0, r)}$ (notez bien la barre au dessus). Les points qui sont à la distance précisément r de x_0 forment une sphère (sans l'intérieur) et sont la frontière entre domaine et le plan (imaginez donc un pays circulaire, ce sont ces points qu'on appelerai sa frontiere sur une carte), on note cet ensemble $\partial\mathscr{B}(x_0, r)$. Enfin les points qui sont à une distance strictement inférieure à r de x_0 sont notés $\mathscr{B}(x_0, r)$ et est appelé boule ouverte de centre x_0 et de rayon r.

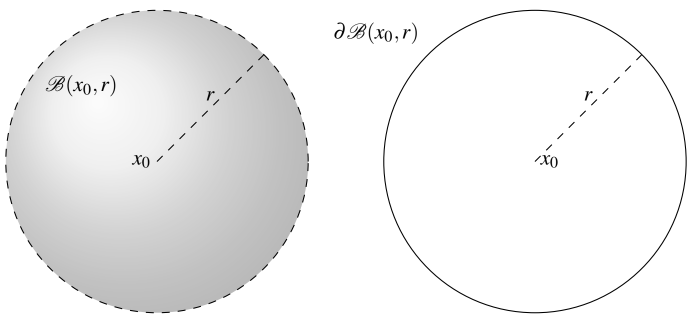

Figure 1 La boule ouverte de rayon r et de centre x_0 et sa frontière

Une propriété interessante est alors discernable : pour tout point x de $\partial\mathscr{B}(x_0,r)$ il existe des points de $\mathscr{B}(x_0,r)$ à des distances arbitrairement petite de x. Plus rigouresement $\forall A \in \partial\mathscr{B}(x_0,r) \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \exists B \in \mathscr{B}(x_0,r) : d(A,B) < \varepsilon$. En d'autre mots les points de la frontière sont les points les plus proches d'etre dans $\mathscr{B}(x_0,r)$ et il n'existe aucun point qui se situerai entre la frontière et l'ensemble qu'elle délimite. Il s'agit là d'une notion intuitive de frontière et de proximite. Cette intuition est une bonne caractérisation de la notion "d'ouvert" et de "fermé". Les fermés possèdent leur frontière, ils permettent de modéliser des objets tangibles là ou les ouverts capturent une notion d'intérieur. On construira les ouverts en général comme des unions de boules ouvertes et les fermés comme des intersections de boules fermées qu'on considèrera comme des "recollements".

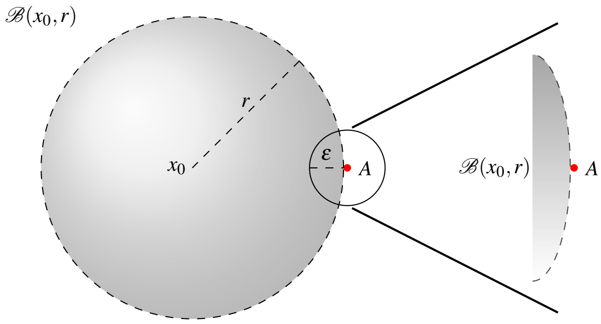

Figure 2 La boule ouverte de rayon r et de centre x_0 et un point $A \in \partial\mathscr{B}(x_0,r)$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un point dans $\mathscr{B}(x_0,r)$ à distance ε de A

1.3 Topologie standard de $\mathbb{R}^n$

Définitions formalisées Cette section s'interesse à donner les définitions de quelques structures qui seront utiles pour la suite et qui ont été motivées à la section précédente.

Definition 1 (Métrique euclidienne) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x, y \in \mathbb{R}^n$, on définit la métrique euclidienne $d_2^n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par (on omet le n quand le contexte est évident par intense flemmardise de l'auteur) :

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=0}^{n}(x_i - y_i)^2)} \tag{1}$$

On peut facilement vérifier qu'elle rspecte les propriétés d'une métrique à savoir :

$$d_2(x,y) \geq 0 \tag{2}$$

$$d_2(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \tag{3}$$

$$d_2(x,y) = d_2(y,x) \tag{4}$$

$$\forall z \in \mathbb{R}^n, d_2(x,y) + d_2(y,z) \geq d_2(x,z) \tag{5}$$

C'est la métrique que nous simples humains utilisons dans notre vie concrète. De nombreuses autres métriques sur $\mathbb{R}^n$ existent mais n'entrent pas dans le cadre de ce résumé. [1]

On peut désormais définir rigoureusement les notions évoquées à la section précédente :

Definition 2 (Boule ouverte) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}$. On définit la boule ouverte de centre x et de rayon r par l'ensemble :

$$\mathscr{B}(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d_2(x,y) < r\} \subseteq \mathbb{R}^n \tag{6}$$

Definition 3 (Boule fermée) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}$. On définit la boule fermée de centre x et de rayon r par l'ensemble :

$$\overline{\mathscr{B}(x,r)} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d_2(x,y) \leq r\} \subseteq \mathbb{R}^n \tag{7}$$

Definition 4 (Frontière d'une boule) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}$. On définit la frontière de la boule ouverte de centre x et de rayon r par l'ensemble :

$$\partial\mathscr{B}(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d_2(x,y) = r\} \subseteq \mathbb{R}^n \tag{8}$$

On peut désormais définir la notion d'ouvert et de fermé grace à notre nouvelle intuition. Les ouverts sont des "recollements" de boules ouvertes et les fermés sont des "découpages" de boules fermées

1. Le lecteur peut néanmoins etre rassuré, toutes les métriques invariantes par translation (c'est à dire que $\forall z \in \mathbb{R}^n, d(x+z, y+z) = d(x,y)$) génèrent des ouverts équivalents.

Definition 5 (Ouverts et fermés) Soit $n \in \mathbb{N}$ on définit l'ensemble des ouverts (engendrés par d_2) noté $\tau_{\mathbb{R}^n} \subseteq 2^{\mathbb{R}^n}$ par l'ensemble des sous ensembles de $\mathbb{R}^n$ qui sont des unions de boules ouvertes. Si on note $\mathtt{B}$ l'ensemble des boules ouvertes sur $\mathbb{R}^n$ on obtiens :

$$\forall E \subseteq \mathbb{R}^n E \in \tau_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow \exists U \subseteq \mathtt{B} \text{ tel que } E = \cup_{B \in U} B \tag{9}$$

Si $x \in \mathbb{R}^n$, un ouvert qui contient xs'appelle un voisinnage de x. On définit les fermés comme étant les complémentaires d'ouverts dans $\mathbb{R}^n$ (si $U \in \tau_{\mathbb{R}^n}$ alors $\mathbb{R}^n - U$ est fermé). De manière équivalente si on note $\overline{\mathtt{B}}$ l'ensemble des boules ouvertes sur $\mathbb{R}^n$ on peut définir que les fermés sont les intersections de boules fermées à savoir :

$$\forall E \subseteq \mathbb{R}^n E \text{ fermé } \Leftrightarrow \exists F \subseteq \overline{\mathtt{B}} \text{ tel que } E = \cap_{B \in F} B \tag{10}$$

En particulier, un fermé borné (contenu dans une boule ouverte de rayon fini) est appelé un compact.

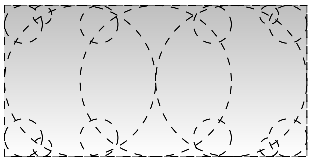

Figure 3 Les réctangles sans bord sont des ouverts

Il convient désormais de trouver une caractérisation plus simple d'un ouvert, en effet la réunion de boule ouverte a beau être très visuelle elle n'aide pas à caractériser les ouverts dans la pratique puisqu'elle requiert de trouver une union dd'ouvert qui recouvre parfaitement l'ensemble fournit ou de prouver qu'il n'en n'existe pas. On revient alors à notre intuition de proximité. On sait que il n'y a pas de points plus proches de la frontière que ceux dans l'ouvert associé. La réciproque, "il n'existe pas d'elements plus proche d'un ouvert U (qui ne soit pos dans U) que ceux de sa frontière" est juste. On s'appuie sur cette propriété pour la caractérisation suivante :

Theorem 1 (Caractérisation des ouverts) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $U \subseteq \mathbb{R}^n$, U est ouvert si et seulement si :

$$\forall x \in U, \exists r \in \mathbb{R} : \mathscr{B}(x,r) \subseteq U \tag{11}$$

En somme, il est impossible d'atteindre la frontière d'un ouvert on avancant d'un ouvert contenu ou égal à U. Ce comportement diffère fortement chez les fermés comme on le verra après.

Références

1. Author, Article title, Journal, Volume, page numbers (year)
2. Author, Book title, page numbers. Publisher, place (year)

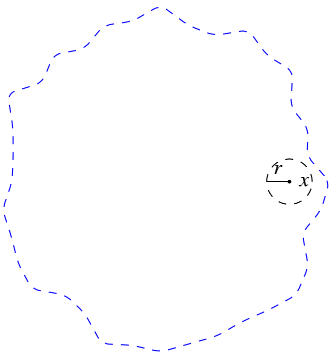

Figure 4 Un ouvert contients un voisinnage de chacun de ses points

Table 1 Liste des symboles utilisés

Symbole	Description
2^X	L'ensemble des sous ensembles de X
$\mathscr{B}(x,r)$	Boule ouverte de rayon r et de centre x
B	Ensemble des boules ouvertes de rayon réel et de centre dans $\mathbb{R}^n$
$\overline{A}$	Adhérance de A
∂A	Frontière de A
d_2	Métrique euclidiène
$\tau_{\mathbb{R}^n}$	Ensemble des ouverts (induits par d_2) de $\mathbb{R}^n$